Université d'Aix-Marseille, Licence SPC, 1re année, 2e semestre

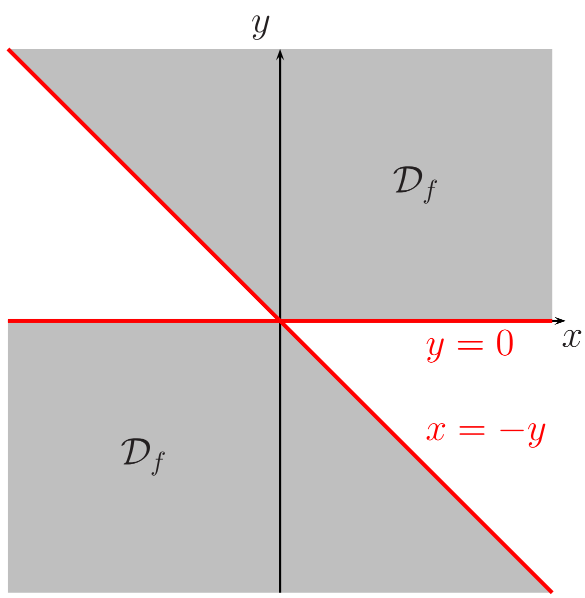
Mathématiques II : Correction du partiel 1

Hugo Raguet

Exercice 1 (5 points)**.** On considère la fonction $f\colon (x,y) \mapsto \ln\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$.

(a) La fonction f est la composition de la fonction $u \mapsto \ln(u)$, définie sur $]0,+\infty[$, et de la fonction $(x,y) \mapsto 1+\frac{x}{y}$, définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. On a donc, en notant $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f, $\mathcal{D}_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \mid 1+\frac{x}{y} > 0\right\}$.
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. On a l'équivalence $1+\frac{x}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} > -1$. Procédons alors par disjonction de cas. Soit $y > 0$, alors $1+\frac{x}{y} > 0 \Leftrightarrow x > -y$. Soit $y < 0$, alors $1+\frac{x}{y} > 0 \Leftrightarrow x < -y$. On conclut

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times]-\infty,0[\mid x<-y\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[\mid x>-y\}\ .$$



(b) La fonction $u\mapsto\ln(u)$ est continue et dérivable sur son domaine de définition, et la fonction $(x,y)\mapsto 1+\frac{x}{y}$ est une fraction rationnelle, donc aussi continue et dérivable sur son domaine de définition. On en conclut que, en tant que composée des deux précédentes, f est à son tour continue et dérivable sur son domaine de définition.

Exercice 2 (5 points)**.** On considère la fonction

$$f\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4-2x^2y+3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) La fonction f est définie sur

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4-2x^2y+3y^2 \neq 0\right\} \cup \{(0,0)\} .$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En développant, on a bien $x^4-2x^2y+3y^2 = (x^2-y)^2+2y^2$. Procédons alors par disjonction de cas. Soit $y=0$, alors $(x^2-y)^2+2y^2 = x^4$, et donc $x^4-2x^2y+3y^2 = 0 \Leftrightarrow x=0$. Soit $y \neq 0$, alors $y^2>0$, et avec $(x^2-y)^2 \geq 0$, on obtient $x^4-2x^2y+3y^2>0$. En conclusion, $x^4-2x^2y+3y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$, et f est donc bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a $f(0,y) = \frac{0}{3y^2} = 0$, donc $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$.
Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(x,mx) = \frac{x^2mx}{x^4-2x^2mx+3(mx)^2} = \frac{x^2mx}{x^2(x^2-2mx+3m^2)} = \frac{mx}{x^2-2mx+3m^2} .$$

Soit $m=0$, alors $f(x,mx)=0$ et on conclut $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$. Soit $m \neq 0$, alors $\lim_{x\to 0} x^2-2mx+3m^2 = 3m^2 \neq 0$ et on conclut $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = 0$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^4-2x^4+3x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} .$$

Donc $\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{1}{2}$.

(d) Si f admet une limite en $(0,0)$, alors cette limite doit être unique. On en conclut que f n'admet pas de limite en $(0,0)$; en particulier, elle n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 3 (Droites du plan affine – 5 points)**.** On considère les trois points du plan $A(1,2)$, $B(2,1)$ et $C(-1,m)$, où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB} = (2-1, 1-2) = (1,-1)$. Or, $A \in (AB)$, on en déduit une représentation paramétrique

$$\begin{aligned} (AB) &= \left\{(1,2)+t(1,-1) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\right\} , \\ &= \left\{(1+t, 2-t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\right\} . \end{aligned}$$

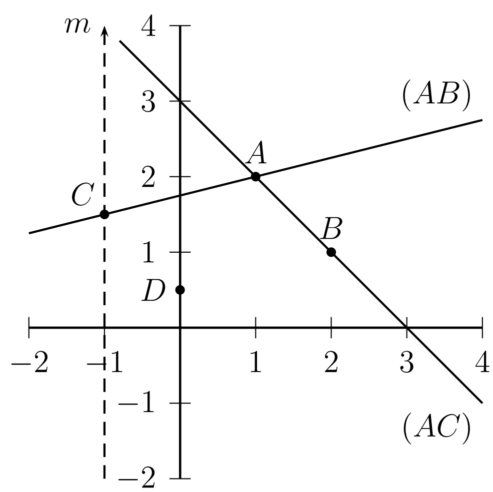
Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(1+t)+(2-t) = 3$, donc $(AB) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y-3=0\}$.
Similairement, on a $\overrightarrow{AC} = (-1-1, m-2) = (-2, m-2)$, et

$$(AC) = \left\{(1-2t, 2+(m-2)t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\right\} .$$

Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(m-2)(1-2t)+2(2+(m-2)t) = (m-2)+4 = m+2$, donc $(AC) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (m-2)x+2y-(m+2)=0\}$.

(b) (AB) et (AC) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc si, et seulement si, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. Or, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & m-2 \end{vmatrix} = 1(m-2) - (-1)(-2) = m - 4$. Finalement (AB) et (AC) sont parallèles si, et seulement si $m = 4$. En ce cas, elles sont confondues car $A \in (AB) \cap (AC)$.

(c) Soit D le point du plan défini par $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. Le parallélogramme $ABDC$ est engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc son aire est égale à $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = |m-4|$. L'aire du triangle est la moitié de l'aire du parallélogramme, c'est-à-dire $\frac{|m-4|}{2}$.



Exercice 4 (Géométrie vectorielle dans l'espace – 5 points)**.** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan vectoriel (P), de vecteurs directeurs $u_1 = (1, 1, 1)$ et $u_2 = (2, 1, 0)$.

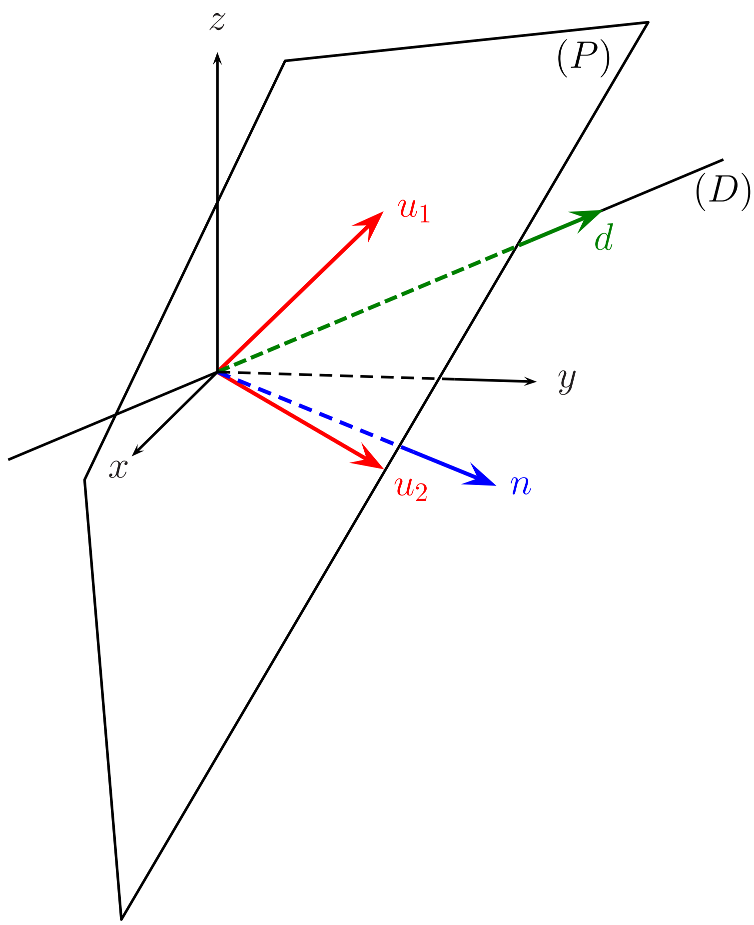
(a) Un vecteur normal à (P) est

$$n = u_1 \wedge u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ -(0-2) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $(P) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot n = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 2y - z = 0\}$.

(b) Soit (D) la droite vectorielle de vecteur directeur $d = (1, 2, 1)$. On a par exemple $d \cdot u_1 = 1 + 2 + 1 = 4 \neq 0$, donc (D) n'est pas orthogonale à (P). Ensuite, on a $d \cdot n = -1 + 4 - 1 = 2 \neq 0$, donc (D) n'est pas incluse dans (P).

(c) On a $d \cdot u_1 = \|d\| \|u_1\| \cos(\widehat{d, u_1})$. Or, $\|u_1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, $\|d\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$. On en déduit $\cos(\widehat{d, u_1}) = \frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$. Ensuite, $\cos^2(\widehat{d, u_1}) + \sin^2(\widehat{d, u_1}) = 1$, et on a $\sin(\widehat{d, u_1}) > 0$ (on s'intéresse à l'angle aigü), on en déduit $\sin(\widehat{d, u_1}) = \sqrt{1 - \frac{16}{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \frac{1}{3}$. De même, $d \cdot u_2 = 2+2+0 = 4$, et $\|u_2\| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$, donc $\cos(\widehat{d, u_2}) = \frac{4}{\sqrt{30}}$, puis $\sin(\widehat{d, u_2}) = \sqrt{1 - \frac{16}{30}} = \sqrt{\frac{14}{30}} = \frac{7}{15}$.



Légende de la correction sur votre copie :

(souligné)	mal exprimé
(entouré)	opérateur mathématique mal utilisé, ou abbréviation abusive
~~(barré)~~	assertion fausse
?	objet non défini, ou transition logique fausse, ou élément inutile
pq ?	(pourquoi ? parce-que…) justification manquante