Université d'Aix-Marseille, Licence SPC, 1re année, 2e semestre

Mathématiques II : Correction du Partiel 2

2016

Exercice 1. On considère le système suivant, avec $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z - 2t = 0 \,, \\ -6x + y + 2z - t = 5 \,, \\ 9x + 6y - 3z - 6t = m \,, \\ 3x + 7y + z + 3t = 3 \,. \end{cases} \tag{1}$$

(a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, on obtient les équivalences suivantes.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z - 2t = 0 \,, & \\ 5y - 5t = 5 \,, & (\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 2\mathrm{L}_1) \\ 0 = m \,, & (\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_1) \\ 5y + 2z + 5t = 3 \,, & (\mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - \mathrm{L}_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z - 2t = 0 \,, & \\ 5y + 2z + 5t = 3 \,, & (\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_4) \\ 5y - 5t = 5 \,, & \\ 0 = m \,. & \end{cases}$$

Ce dernier système est un système échelonné, avec une équation de compatibilité. Le système admet des solutions si, et seulement si, $m = 0$.

(b) On suppose $m = 0$. Le dernier système échelonné comprends trois équations non triviales et quatre inconnues, l'ensemble des solutions est donc un espace affine de dimension $4 - 3 = 1$, c'est-à-dire une droite affine. Elle admet donc une représentation paramétrique avec un paramètre libre ; on peut par exemple exprimer chaque coordonnée en fonction de t, par substitution.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -2y + z + 2t \\ 2z = 3 - 5t - 5y \,, \\ 5y = 5 + 5t \,, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -2(t+1) + z + 2t \,, \\ 2z = 3 - 5t - 5(t+1) \,, \\ y = t + 1 \,, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -2(t+1) + (-5t-1) + 2t \,, \\ z = -5t - 1 \,, \\ y = t + 1 \,, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3}t - 1 \,, \\ z = -5t - 1 \,, \\ y = t + 1 \,. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\left(-\frac{5}{3}t - 1, -5t - 1, t + 1, t\right) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les familles de vecteurs suivantes.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{u_1, u_2\} = \{(3,2,1),(0,-1,2)\}\ ,\\
\mathcal{V} &= \{v_1, v_2\} = \{(3,2,1),(6,4,2)\}\ ,\\
\mathcal{W} &= \{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \{(1,2,0),(2,0,-1),(0,0,1),(4,3,2)\}\ .
\end{aligned}
$$

Pour chacune de ces familles, répondre aux questions suivantes, en justifiant.

(a) La famille est-elle libre ?

Une famille de vecteurs $(v_i)_{i=1}^{i=n}$ est libre si, et seulement si,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

famille $\mathcal{U}$:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

donc la famille est libre.

famille $\mathcal{V}$: On remarque que $2v_1 - v_2 = 0$, donc la famille n'est pas libre ($\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$).

famille $\mathcal{W}$: Dans un espace de dimension 3 (ici $\mathbb{R}^3$), toute famille libre comporte au plus trois vecteurs : en effet, trois vecteurs libres forment une base, donc n'importe quel autre vecteur peut être écrit comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs.

(b) La famille est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Sinon, quel est son rang ?

Une famille de vecteurs $(v_i)_{i=1}^{i=n}$ est génératrice d'un espace vectoriel E si, et seulement si,

$$\forall v \in E,\ \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Le rang d'une famille de vecteurs est égal au nombre de vecteurs libres dans la famille.

famille $\mathcal{U}$: Deux vecteurs libres engendrent un plan vectoriel, noté ici $\mathrm{vect}\big(u_1, u_2\big)$. Il est impossible d'exprimer n'importe quel vecteur $u \in \mathbb{R}^3,\ u \notin \mathrm{vect}\big(u_1, u_2\big)$ (par exemple $u = u_1 \wedge u_2$) comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs (sinon, par définition de $\mathrm{vect}(u_1, u_2)$, u y appartient). Le rang est 2.

famille $\mathcal{V}$: Les deux vecteurs étant colinéaires, ils engendrent une droite vectoriel, donc $\mathcal{V}$ ne peux pas être génératrice de $\mathbb{R}^3$. Son rang est 1.

famille $\mathcal{W}$: Vérifions s'il existe une famille libre de trois vecteurs dans $\mathcal{W}$:

$$\det(w_1, w_2, w_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 0 = -4 \neq 0,$$

donc la famille est libre, d'où on en déduit que $\mathcal{W}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Son rang est 3, rang maximal pour une famille dans un espace de dimension 3.

(c) La famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Sinon, la transformer en une base, en enlevant ou rajoutant un minimum de vecteurs.

Une base d'un espace vectoriel de dimension n est une famille libre (donc elle comporte au plus n vecteurs) et génératrice (au moins n vecteurs). Par conséquant, toute famille de n vecteurs libres ou générateurs est une base.

famille $\mathcal{U}$: La famille $\mathcal{U}$ ne peut pas être une base, parce qu'elle n'a que deux vecteurs. En revanche, en lui ajoutant un vecteur libre aux u_1 et u_2, on la transforme en une base de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, la famille $\mathcal{U}' = \{u_1, u_2, u_1 \wedge u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

famille $\mathcal{V}$: Ici, il faut enlever un des vecteurs colinéaires et rajouter deux autres en formant une famille libre. On enlève v_2, et comme $v_1 = u_1$, on peut reprendre la famille $\mathcal{U}'$.

famille $\mathcal{W}$: On a déjà vu qu'en enlevant w_4 on obtient une famille libre et génératrice, donc base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.

(a) Soit le déterminant $d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, et la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer d, et en déduire $\det(A)$.

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times 10 = 30.$$

En développant sur la dernière ligne,

$$\det(A) = 0 + 0 - 1 \times d + 0 = -d = -30.$$

(b) En déduire les déterminants des matrices suivantes, en remarquant leurs relations entres-elles et avec la matrice A, et/ou en utilisant les propriétés du déterminant.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 300 & 4 \\ -1 & 1 & -100 & 1 \\ -2 & -4 & 100 & 2 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 300 & 2 & 1 & 4 \\ -100 & 1 & -1 & 1 \\ 100 & -4 & -2 & 2 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 300 & -100 & 100 & 100 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 300 & -100 & 100 & 100 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 302 & -99 & 96 & 100 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

et $F = 2CD$.

La matrice B est la même que A, sauf qu'on lui a multiplié la troisième colonne par 100. Par linéarité du déterminant par rapport à chaque colonne, $\det(B) = 100\det(A) = -3000$.

La matrice C est obtenue de B avec un échange entre la prémière et la troisième colonne. Donc $\det(C) = -\det(B) = 3000$.

On sait que $\det D = \det(D^T)$. Or $D^T = C$, donc $\det(D) = \det(C) = 3000$.

On remarque que la troisième ligne de E est une combinaison linéaire de ses deux prémières lignes (simplement leurs somme), donc $\det E = 0$.

Le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants des matrices, donc $\det(F) = \det(2CD) = \det(2ICD) = \det(2I)\det(C)\det(D)$. Comme le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ou ligne), $\det(2I) = 2^4\det(I) = 2^4$. Donc finalement, $\det(F) = 2^4\det(C)\det(D)$.

Exercice 4. On considère l'application suivante

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) & \longmapsto & x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \end{array}.$$

(a) Soit $x = (x_1,x_2,x_3,x_4), y = (y_1,y_2,y_3,y_4) \in \mathbb{R}^4$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \lambda x_3 + y_3, \lambda x_4 + y_4)$, et donc

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \lambda x_1 + y_1 + 2(\lambda x_2 + y_2) + 3(\lambda x_3 + y_3) + 4(\lambda x_4 + y_4)\ , \\ &= \lambda x_1 + 2\lambda x_2 + 3\lambda x_3 + 4\lambda x_4 + y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4\ , \\ &= \lambda(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4) + (y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4)\ , \\ &= \lambda f(x) + f(y)\ . \end{aligned}$$

On en déduit que f est une application linéaire.

(b) On a $f(1,0,0,0) = 1$, $f(0,1,0,0) = 2$, $f(0,0,1,0) = 3$ et $f(0,0,0,1) = 4$, donc la matrice associée à f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}$ est $(1\ 2\ 3\ 4)$.

(c) Avec $n = (1,2,3,4)$, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $n \cdot x = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = f(x)$.

(d) Premièrement, on a $f(0) = 0$, donc $0 \in \ker(f)$ et $\ker(f) \neq \emptyset$. Ensuite, soit $x, y \in \ker(f)$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de f, puis par définition de $\ker(f)$, on obtient $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda \times 0 + 0 = 0$, donc $\lambda x + y \in \ker(f)$. En conclusion, $\ker(f)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$, non vide et stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(e) On sait que $\mathrm{im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, donc $\dim(\mathrm{im}(f)) \leq 1$. Or, on a par exemple $f(1,0,0,0) = 1 \neq 0$, donc $\mathrm{im}(f) \neq \{0\}$, et donc $\dim(\mathrm{im}(f)) \geq 1$. En conclusion, $\dim(\mathrm{im}(f)) = 1$.

(f) D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Avec (e), on déduit $\dim(\ker(f)) = 4 - 1 = 3$.