Université d'Aix-Marseille, Licence SV, 1re année, 2e semestre

Mathématiques : devoir 1

Hugo Raguet

avril 2016

Une marque de gâteaux offre en cadeau, avec l'achat de chaque paquet de cette marque, un aimant à coller sur le réfrigérateur. Il y a $M \in \mathbb{N}^*$ aimants différents, et on suppose que pour chaque paquet acheté, l'aimant offert peut être chacun des M aimants, de façon équiprobable et indépendante des autres paquets achetés.
On souhaiterait connaitre le nombre moyen de paquets à acheter pour avoir toute la collection, c'est-à-dire pour avoir M aimants différents. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit X_n la variable aléatoire qui compte le nombre exact d'aimants différents qu'on a après n achats, à valeur dans $\{0, \dots, M\}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $m \in \{0, \dots, M-1\}$. Si on a exactement $X_{n-1} = m$ aimants différents après $n-1$ achats, quelles sont les différentes valeurs possibles pour X_n, et quelles sont leurs probabilités respectives ?

   À l'achat n, soit on tire un des m aimants qu'on a déjà, alors on a toujours m aimants différents. Avec l'hypothèse d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X_n = m \mid X_{n-1} = m) = \frac{m}{M}$. Sinon, on tire un des $M-m$ aimants qu'on n'a pas encore, alors on a $m+1$ aimants différents, avec $\mathbb{P}(X_n = m+1 \mid X_{n-1} = m) = 1 - \frac{m}{M}$.

2. Soit $m \in \{0, \dots, M-1\}$. Dans un premier temps, on suppose qu'on commence avec exactement $X_0 = m$ aimants différents, et on s'intéresse au nombre d'achats nécessaires pour passer de m à $m+1$ aimants différents ; soit $N_{m\to m+1}$ la variable aléatoire correspondante, à valeur dans $\mathbb{N}^*$.

   (a) Donner, dans cette expérience, la loi de $N_{m\to m+1}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Obtenir $m+1$ aimants différents après exactement n achats est équivalent à n'avoir toujours que m aimants différents après $n-1$ achats et tirer un nouvel aimant différent à l'achat n. On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{m\to m+1} = n) &= \mathbb{P}(\{X_n = m+1\} \cap \{X_{n-1} = m\})\\ &= \mathbb{P}(X_n = m+1 \mid X_{n-1} = m)\mathbb{P}(X_{n-1} = m)\\ &= \left(1 - \frac{m}{M}\right)\left(\frac{m}{M}\right)^{n-1} .\end{aligned}$$

   (b) Le nombre moyen d'achats nécessaires pour passer de m à $m+1$ aimants différents est $\mathbb{E}(N_{m\to m+1}) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(N_{m\to m+1} = n)$. En admettant que pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$, $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, montrer que $\mathbb{E}(N_{m\to m+1}) = \frac{M}{M-m}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(N_{m\to m+1} = n) = \sum_{n=0}^{N} n\left(1-\frac{m}{M}\right)\left(\frac{m}{M}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{m}{M}\right)\sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{m}{M}\right)^{n-1}$. En utilisant la formule donnée avec $x = \frac{m}{M} < 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_{m\to m+1}) &= \left(1-\frac{m}{M}\right)\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{m}{M}\right)^{n-1} \\ &= \left(1-\frac{m}{M}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{m}{M}\right)^2} = \frac{1}{1-\frac{m}{M}} = \frac{M}{M-m}\ .\end{aligned}$$

3. On suppose maintenant que l'on commence avec aucun aimant, $X_0 = 0$, et on note N la variable aléatoire qui compte le nombre d'achats nécessaires pour avoir toute la collection. En admettant que $N = N_0 + \cdots + N_{M-1}$, où pour tout $m \in \{0, \ldots, M-1\}$, N_m est une variable aléatoire de même loi que $N_{m\to m+1}$ définie en 2, exprimer le nombre moyen d'achats nécessaires pour avoir toute la collection. Donner une valeur approchée pour $M = 12$.

   Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(N) = \sum_{m=0}^{M-1}\mathbb{E}(N_m) = \sum_{m=0}^{M-1}\frac{M}{M-m} = M\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m}$.

   Avec $M = 12$, on trouve $\mathbb{E}(N) \approx 37$.

   Bon courage pour finir les *Asie'Magnets*...