Université d'Aix-Marseille, Licence SV, 1re année, 2e semestre

Mathématiques : Partiel 1 – correction

Hugo Raguet

Exercice 1. On considère la fonction $f\colon x \mapsto \frac{x^2+2x+1}{x-1}$.

1. La fonction f est une fraction rationnelle, définie sur

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\} \ .$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, avec pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(x-1) - (x^2+2x+1)(1)}{(x-1)^2} \ , \\ &= \frac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \ , \\ &= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \ . \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On a

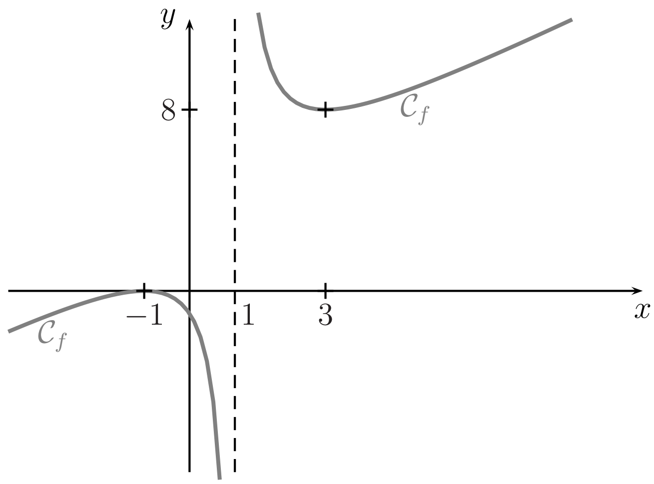
$$\begin{aligned} (x+3) + \frac{4}{x-1} &= \frac{(x+3)(x-1)+4}{x-1} \ , \\ &= \frac{x^2 - x + 3x - 3 + 4}{x-1} \ , \\ &= \frac{x^2+2x+1}{x-1} = f(x) \ . \end{aligned}$$

4. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $(x-1)^2 > 1$, donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x - 3$.
Il s'agit d'un polynôme de degré 2, dont le discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$, et les racines sont $\frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2(1)} = -1$ et $\frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2(1)} = 3$.
Le coefficient dominant étant positif, on en déduit que f' est positive sur $]-\infty,-1[\,\cup\,]3,+\infty[$ et négative sur $]-1,3[$.
De plus, f admet un maximum local en -1 égal à $f(-1) = \frac{1-2+1}{-2} = 0$, et un minimum local en 3 égal à $f(3) = \frac{9+6+1}{2} = 8$.
Ensuite, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+3) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
De même, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+3) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Enfin, on a $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} \frac{4}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1} (x+3) = 2$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} f(x) = -\infty$.
De même, on a $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} \frac{4}{x-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} f(x) = +\infty$.

On peut finalement dresser le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

5.



Exercice 2. $\begin{cases} \text{Pour tout } t \in \mathbb{R},\ y'(t) + 2y(t) = t - 4\ , & \text{(1a)} \\ y(0) = 1\ . & \text{(1b)} \end{cases}$

On a l'équivalence (1a) $\Leftrightarrow$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = -2y(t) + t - 4$.
Soit $y_1\colon t \mapsto at+b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $y_1'(t) = a$, et $-2y_1(t)+t-4 = (-2a+1)t + (-2b-4)$. On en déduit l'équivalence

$$y_1 \text{ solution de (1a)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 &= -2a+1\ , \\ a &= -2b-4\ , \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{2}\ , \\ b &= -\frac{9}{4}\ . \end{cases}$$

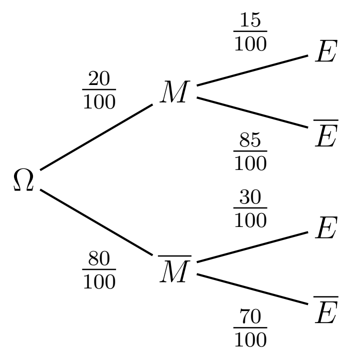
Donc $y_1\colon t \mapsto \frac{1}{2}t - \frac{9}{4}$ est une solution particulière de l'équation différentielle linéaire (1a). Si $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a alors l'équivalence

$$(y_1 + z) \text{ solution de (1)} \Leftrightarrow z \text{ vérifie } \begin{cases} \text{pour tout } t \in \mathbb{R},\ z'(t) = -2z(t)\ , \\ z(0) = 1 - y_1(0) = \frac{13}{4}\ . \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow z\colon t \mapsto \frac{13}{4}\exp\left(\int_0^t -2\mathrm{d}s\right) = \frac{13}{4}e^{-2t}\ .$$

Finalement, la solution du problème de Cauchy (1) est $y\colon t \mapsto \frac{13}{4}e^{-2x}t\frac{1}{2}t - \frac{9}{4}$.

Exercice 3.

1. On définit les évènements suivants :
   M : “le Français considéré vient du Midi” ;
   E : “le Français considéré passe ses vacances à l’étranger” ;
   et on note $\overline{M}$ et $\overline{E}$ leurs complémentaires respectifs.
   L’énoncé donne $\mathbb{P}(M) = \frac{20}{100}$, $\mathbb{P}(E|M) = \frac{15}{100}$, et $\mathbb{P}(E|\overline{M}) = \frac{30}{100}$.
   On cherche $\mathbb{P}(M|E)$.
   Par complémentarité, $\mathbb{P}(\overline{M}) = 1 - \mathbb{P}(M) = \frac{80}{100}$.
   De plus, $(E, \overline{E})$ est un système total, donc $\mathbb{P}(\overline{E}|M) + \mathbb{P}(E|M) = \frac{\mathbb{P}(\overline{E}\cap M)}{\mathbb{P}(M)} + \frac{\mathbb{P}(E\cap M)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(M)} = 1$. On en déduit $\mathbb{P}(\overline{E}|M) = 1 - \mathbb{P}(E|M) = \frac{85}{100}$. De même $\mathbb{P}(\overline{E}|\overline{M}) = 1 - \mathbb{P}(E|\overline{M}) = \frac{70}{100}$.
   On peut alors établir l’arbre de probabilité suivant :



2. D’après la formule de Bayes, $\mathbb{P}(M|E) = \dfrac{\mathbb{P}(E|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(E)}$.

3. Or, $(M, \overline{M})$ est un système total, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(E|\overline{M})\mathbb{P}(\overline{M}) \ , \\ &= \frac{15}{100}\frac{20}{100} + \frac{30}{100}\frac{80}{100} \ .\end{aligned}$$

   Finalement, $\mathbb{P}(M|E) = \frac{\frac{15}{100}\frac{20}{100}}{\frac{15}{100}\frac{20}{100}+\frac{30}{100}\frac{80}{100}} = \frac{300}{300+2400} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$.

Exercice 4. On considère l’équation différentelle dite *équation de la tractrice*

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R},\ x'(t) = 2(x(t) - 2t)^2 \ . \tag{1}$$

1. Soit x une solution de (1). On pose alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) \neq (2t-1)$, $z(t) = \frac{1}{x(t)-2t+1}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) \neq (2t-1)$, z est dérivable en t, avec

$$\begin{aligned}z'(t) = &- \frac{x'(t) - 2}{(x(t) - 2t + 1)^2} \\ = &- 2\frac{(x(t) - 2t)^2 - 1}{(x(t) - 2t + 1)^2} \ .\end{aligned}$$

Or, en développant, $(x(t) - 2t + 1)^2 = (x(t) - 2t)^2 + 2(x(t) - 2t) + 1$, donc

$$\begin{aligned}(x(t) - 2t)^2 - 1 &= (x(t) - 2t + 1)^2 - 2(x(t) - 2t) - 2 \ , \\ &= (x(t) - 2t + 1)^2 - 2(x(t) - 2t + 1) \ .\end{aligned}$$

Finalement,

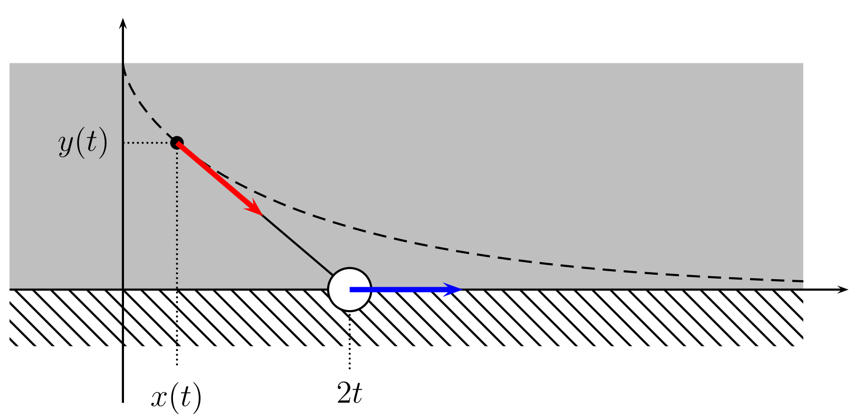
$$\begin{aligned}z'(t) = &-2\left(\frac{(x(t) - 2t + 1)^2}{(x(t) - 2t + 1)^2} - 2\frac{x(t) - 2t + 1}{(x(t) - 2t + 1)^2}\right) \\ = &-2 + 4\frac{1}{x(t) - 2t + 1} = 4z(t) - 2 \ .\end{aligned}$$

2. Avec $x(0) = 0$, z est bien définie en 0 et $z(0) = \frac{1}{0-0+1} = 1$.
3. Sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0 et où z est définie, z est la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} \text{pour tout } t \in I,\ z'(t) = 4z(t) - 2 \ , & \text{(2a)} \\ z(0) = 1 \ . & \text{(2b)} \end{cases}$

   On voit que la fonction constante $t \mapsto \frac{1}{2}$ est une solution particulière de (2a). On en déduit que $\zeta = z - \frac{1}{2}$ vérifie $\begin{cases} \text{pour tout } t \in I,\ \zeta'(t) = 4\zeta(t) \ , \\ \zeta(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ . \end{cases}$

   On en déduit que sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0 et où z est définie, on a $z\colon t \mapsto \frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}$.
4. On en déduit qu'une condition nécessaire sur x est que, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0 tel que pour tout $t \in I$, $x(t) \neq 2t - 1$, on ait : pour tout $t \in I$, $x(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{4t}+\frac{1}{2}} + 2t - 1 = \frac{2}{e^{4t}+1} + 2t - 1$.

   Réciproquement, on peut vérifier que $x\colon t \mapsto \frac{2}{e^{4t}+1} + 2t - 1$ est la solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy associé à (1) sous la condition $x(0) = 0$.
5. La situation est schématisée ci-dessous.



À chaque instant $t \in \mathbb{R}_+$, l'enfant est à la position $(2t, 0)$. La longueur de la corde étant constante égale à 1, on a d'après le théorème de Pythagore,

$(x(t)-2t)^2+y(t)^2=1$. Or, d'après la question précédente, on a $(x(t)-2t)^2=(\frac{2}{e^{4t}+1}-1)^2=\frac{4}{(e^{4t}+1)^2}-\frac{4}{e^{4t}+1}+1$, et donc $y(t)^2=4\left(\frac{1}{e^{4t}+1}-\frac{1}{(e^{4t}+1)^2}\right)=\frac{4e^{4t}}{(e^{4t}+1)^2}$. Or, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $y(t)\geq 0$, donc on conclut $y\colon t\mapsto\frac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}$.