Université d'Aix-Marseille, Licence SV, 1re année, 2e semestre
Mathématiques pour la biologie : correction TD2
1er mars 2016
Hugo Raguet

Exercice 2.

1. Vu en cours.
2. Vu en cours.
3. $$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ 3y'(x) - y(x) = x\ , & \text{(3a)} \\ y(0) = 0\ . & \text{(3b)} \end{cases}$$

   On a l'équivalence (3a) $\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = \frac{1}{3}y(x) + \frac{1}{3}x$.
   Soit $y_3 \colon x \mapsto ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $y_3'(x) = a$, et $\frac{1}{3}y_3(x) + \frac{1}{3}x = (\frac{1}{3}a + \frac{1}{3})x + \frac{1}{3}b$. On en déduit l'équivalence

   $$y_3 \text{ solution de (3a)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 &= \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\ , \\ a &= \frac{1}{3}b\ , \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} a &= -1\ , \\ b &= -3\ . \end{cases}$$

   Donc $y_3 \colon x \mapsto -x - 3$ est une solution particulière de l'équation différentielle linéaire (3a). Si $z \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a alors l'équivalence

   $$(y_3 + z) \text{ solution de (3)} \Leftrightarrow z \text{ vérifie } \begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ z'(x) = \frac{1}{3}z(x)\ , \\ z(0) = 0 - y_3(0) = 3\ . \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow z \colon x \mapsto 3\exp\left(\int_0^x \tfrac{1}{3}\mathrm{d}s\right) = 3e^{\frac{1}{3}x}\ .$$

   Finalement, la solution du problème de Cauchy (3) est $y \colon x \mapsto 3e^{\frac{1}{3}x} - x - 3$.

4. $$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ y'(x) + 3y(x) = 3\sin(x) + \cos(x)\ , & \text{(4a)} \\ y(0) = 1\ . & \text{(4b)} \end{cases}$$

   On a l'équivalence (4a) $\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = -3y(x) + 3\sin(x) + \cos(x)$.
   Soit $y_4 \colon x \mapsto a\sin(x) + b\cos(x)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $y_4'(x) = a\cos(x) - b\sin(x)$, et $-3y_4(x) + 3\sin(x) + \cos(x) = (3 - 3a)\sin(x) + (1 - 3b)\cos(x)$. On en déduit l'équivalence

   $$y_4 \text{ solution de (4a)} \Leftrightarrow \begin{cases} -b &= 3 - 3a\ , \\ a &= 1 - 3b\ , \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} b &= 3a - 3\ , \\ a &= 1 - 9a + 9\ , \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} b &= 0\ , \\ a &= 1\ , \end{cases}$$

Donc $y_4\colon x \mapsto \sin(x)$ est une solution particulière de l'équation différentielle linéaire (4a). Si $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a alors l'équivalence

$$\begin{aligned}(y_4 + z) \text{ solution de } (4) &\Leftrightarrow z \text{ vérifie } \begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ z'(x) = -3z(x)\ , \\ z(0) = 1 - y_4(0) = 1\ . \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z\colon x \mapsto 1 \exp\left(\int_0^x -3 \mathrm{d}s\right) = e^{-3x}\ .\end{aligned}$$

Finalement, la solution du problème de Cauchy (4) est $y\colon x \mapsto e^{-3x} + \sin(x)$.

5. $$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ z'(x) + z(x) = e^{2x}\ , & \text{(5a)} \\ z(1) = 1\ . & \text{(5b)} \end{cases}$$

On a l'équivalence (5a) $\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = -z(x) + e^{2x}$.
Soit $z_5\colon x \mapsto ae^{2x}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $z_5'(x) = 2ae^{2x}$, et $-z_5(x) + e^{2x} = (1-a)e^{2x}$. On en déduit l'équivalence

$$\begin{aligned} z_5 \text{ solution de (5a)} &\Leftrightarrow 2a = 1 - a\ , \\ &\Leftrightarrow a = \tfrac{1}{3}\ . \end{aligned}$$

Donc $z_5\colon x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle linéaire (5a). Si $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a alors l'équivalence

$$\begin{aligned}(z_5 + y) \text{ solution de } (5) &\Leftrightarrow y \text{ vérifie } \begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ y'(x) = -y(x)\ , \\ y(1) = 1 - z_5(1) = 1 - \frac{1}{3}e^2\ . \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y\colon x \mapsto (1 - \tfrac{1}{3}e^2) \exp\left(\int_1^x -1 \mathrm{d}s\right) = (1 - \tfrac{1}{3}e^2)e^{1-x}\ .\end{aligned}$$

Finalement, la solution du problème de Cauchy (5) est $z\colon x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x} + (1 - \frac{1}{3}e^2)e^{1-x}$.

6. $$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ u'(x) + u(x) = 2e^{2x}\ , & \text{(6a)} \\ u(-1) = 2\ . & \text{(6b)} \end{cases}$$

On a l'équivalence (6a) $\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -u(x) + 2e^{x}$.
Soit $u_6\colon x \mapsto ae^{x}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u_6'(x) = ae^{x}$, et $-u_6(x) + 2e^{x} = (2-a)e^{x}$. On en déduit l'équivalence

$$\begin{aligned} u_6 \text{ solution de (6a)} &\Leftrightarrow a = 2 - a\ , \\ &\Leftrightarrow a = 1\ . \end{aligned}$$

Donc $z_6\colon x \mapsto e^{x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle linéaire (6a). Si $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a alors l'équivalence

$$\begin{aligned}(u_6 + v) \text{ solution de } (6) &\Leftrightarrow v \text{ vérifie } \begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ v'(x) = -v(x)\ , \\ v(-1) = 2 - u_6(-1) = 2 - e^{-1}\ . \end{cases} \\ &\Leftrightarrow v\colon x \mapsto (2 - e^{-1}) \exp\left(\int_{-1}^x -1 \mathrm{d}s\right) = (2 - e^{-1})e^{-x-1}\ .\end{aligned}$$

Finalement, la solution du problème de Cauchy (6) est $u\colon x \mapsto e^{x} + (2 - e^{-1})e^{-x-1}$.

Exercice 4.

$$\begin{cases} \text{Pour tout } t \in \mathbb{R},\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = -au(t)\ , & \text{(1a)} \\ u(0) = u_0\ . & \text{(1b)} \end{cases}, \qquad \text{avec } a, u_0 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Il s'agit d'un problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire homogène. La solution est $u\colon t \mapsto u_0 \exp\left(\int_0^t -a\mathrm{d}s\right) = u_0 e^{-at}$.
Soit $T \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} u(T) = \tfrac{1}{2}u_0 &\Leftrightarrow u_0 e^{-aT} = \tfrac{1}{2}u_0\ , \\ &\Leftrightarrow e^{-aT} = \tfrac{1}{2}\ , \\ &\Leftrightarrow -aT = \ln(\tfrac{1}{2}) = -\ln(2)\ , \\ &\Leftrightarrow a = \tfrac{\ln(2)}{T}\ . \end{aligned}$$

Donc avec $T = 4{,}5 \times 10^4$ (en années), on obtient $a \approx 1{,}5 \times 10^{-5}$ (en années inverses, ou par années).
De façon similaire, avec $t_1 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(t_1) = \tfrac{99}{100}u_0 &\Leftrightarrow e^{-at_1} = \tfrac{99}{100}\ , \\ &\Leftrightarrow -at_1 = \ln(\tfrac{99}{100})\ , \\ &\Leftrightarrow t_1 = -\tfrac{\ln(\frac{99}{100})}{a}\ . \end{aligned}$$

Pour l'uranium U238, on obtient $t_1 \approx 6{,}5 \times 10^2$, il faut donc attendre environ 650 ans pour qu'une quantité donnée diminue de 1 %.