

**Université d'Aix-Marseille, Licence SV, 1^{re} année, 2^e semestre
Mathématiques pour la biologie : correction TD3**

4 mars 2016

Hugo Raguet

Exercice 3.

On définit les évènements suivants :

M : “la personne considérée est malade (de l’hépatite)” ;

P : “le test est positif” ;

et on note \bar{M} et \bar{P} leur complémentaires respectifs.

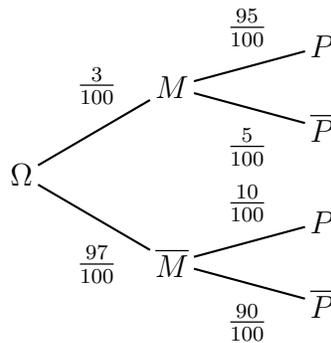
L’énoncé donne $\mathbb{P}(M) = \frac{3}{100}$, $\mathbb{P}(P|M) = \frac{95}{100}$, et $\mathbb{P}(P|\bar{M}) = \frac{10}{100}$.

On peut en déduire $\mathbb{P}(\bar{M}) = 1 - \mathbb{P}(M) = \frac{97}{100}$.

De plus, (P, \bar{P}) est un système total, donc $\mathbb{P}(\bar{P}|M) + \mathbb{P}(P|M) = \frac{\mathbb{P}(\bar{P} \cap M)}{\mathbb{P}(M)} + \frac{\mathbb{P}(P \cap M)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(M)} = 1$.

On en déduit $\mathbb{P}(\bar{P}|M) = 1 - \mathbb{P}(P|M) = \frac{5}{100}$. De même $\mathbb{P}(\bar{P}|\bar{M}) = 1 - \mathbb{P}(P|\bar{M}) = \frac{90}{100}$.

On peut alors établir l’arbre de probabilité suivant :



1. On cherche $\mathbb{P}(M|P)$. D’après la formule de Bayes, $\mathbb{P}(M|P) = \frac{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)}$.

Or, (M, \bar{M}) est un système total, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P|\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M}) , \\ &= \frac{95}{100} \frac{3}{100} + \frac{10}{100} \frac{97}{100} . \end{aligned}$$

Finalement, $\mathbb{P}(M|P) = \frac{\frac{95}{100} \frac{3}{100}}{\frac{95}{100} \frac{3}{100} + \frac{10}{100} \frac{97}{100}} = \frac{285}{1255} = \frac{57}{251}$.

2. On cherche $\mathbb{P}(\bar{M}|P)$. Or, de même que précédemment, $\mathbb{P}(\bar{M}|P) = 1 - \mathbb{P}(M|P)$, et d’après la question 1, $\mathbb{P}(\bar{M}|P) = \frac{194}{251}$.

3. On cherche $\mathbb{P}(M|\bar{P})$. De même que précédemment, $\mathbb{P}(M|\bar{P}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{P}|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\bar{P})}$, et $\mathbb{P}(\bar{P}) =$

$$1 - \mathbb{P}(P). \text{ On en déduit } \mathbb{P}(M|\bar{P}) = \frac{\frac{5}{100} \frac{3}{100}}{1 - (\frac{95}{100} \frac{3}{100} + \frac{10}{100} \frac{97}{100})} = \frac{15}{8745} = \frac{1}{583}.$$

4. On cherche $\mathbb{P}(\bar{M}|\bar{P})$. Or, de même que précédemment, $\mathbb{P}(\bar{M}|\bar{P}) = 1 - \mathbb{P}(M|\bar{P})$, et d’après la question 3, $\mathbb{P}(\bar{M}|\bar{P}) = \frac{582}{583}$.