Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Algèbre linéaire 1

Feuille 1 de TD
Logique

Exercice 1 (sens et négation du OU et du ET)

Jean est blond et Julie est brune. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, puis les nier.

1. Jean est brun ou Jean est blond.
2. Jean est roux et Julie est brune.
3. Jean n'est pas blond ou Julie est brune.
4. Il n'est pas vrai que Jean n'est pas blond.

Exercice 2 (négation du OU et du ET) Soit x un réel. Nier les propositions suivantes :

1. $x = 1$ ou $x = -1$
2. $0 \leq x \leq 1$ (ce qui veut dire par définition : $0 \leq x$ et $x \leq 1$)
3. $x = 0$ ou ($x^2 = 1$ et $x \geq 0$)

Exercice 3 (énoncés avec l'ensemble vide) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit P la proposition "Pour tout réel x dans A, $x^2 \geq 12$". Nier P. On suppose maintenant que $A = \emptyset$. La négation de P est-elle vraie ou fausse ? P est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 4 (négation d'énoncés avec quantificateurs) Nier, en français courant, les propositions suivantes :

1. Il y a au moins un étudiant qui aime le tennis.
2. Tous les étudiants aiment lire.
3. Dans toutes les matières, il y a au moins un étudiant qui travaille régulièrement.
4. Il y a au moins un étudiant qui, dans toutes les matières, travaille régulièrement .

Exercice 5 (propriétés du OU et du ET) Soient A, B, C, D des propositions. Montrer que :

(A ou B) et (C ou D) est équivalent à (A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D)

Application : trouver les couples de réels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 (compréhension et négation d'implications) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et les nier.

1. Pour tout réel x, si $x \geq 3$ alors $x^2 \geq 5$
2. Pour tout entier naturel n, si $n > 1$ alors $n \geq 2$
3. Pour tout réel x, si $x > 1$ alors $x \geq 2$
4. Pour tout réel x, $x^2 \geq 1$ est équivalent à $x \geq 1$ (se rappeler qu'une équivalence est une double implication)

Exercice 7 (ordre des quantificateurs, importance de l'ensemble auquel appartiennent les éléments) Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout entier naturel n, il existe un réel x tel que $x > 2n$
2. Il existe un réel x tel que, pour tout entier naturel n, $x > 2n$
3. Pour tout réel x, pour tout réel y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.
4. Pour tout réel positif x, pour tout réel positif y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.

Exercice 8 (implications) Donner la réciproque et la contraposée des implications suivantes (x est un réel, n un entier naturel)..

1. Si le père Noël existe alors Noël est en juillet
2. Si $x \geq 3$, alors $x + 2 \geq 5$.
3. Si $n \geq 1$ alors $n^2 > n$.

Exercice 9 Soit F l'ensemble des femmes. On note $P(x, y)$ l'expression "x est la fille de y", où x et y sont des femmes. Ecrire les formules suivantes dans le langage des ensembles puis en écriture formalisée, puis les nier en écriture formalisée (voir exemple ci-dessous).

1. Toute femme a au moins une fille.
2. Il y a au moins une femme qui a au moins une fille.
3. Toute femme a au moins une mère.
4. Il y a au moins une femme qui n'a aucune fille.

Par exemple, la première proposition s'écrit "pour tout y dans F, il existe x dans F tel que x est la fille de y" dans le langage des ensembles, et $\forall y \in F, \exists x \in F, P(x, y)$ en écriture formalisée. Sa négation en écriture formalisée est : $\exists y \in F, \forall x \in F, nonP(x, y)$

Exercice 10 (compréhension d'énoncés avec quantificateurs, importance de l'ordre). A l'université Deuxphine, il n'y a que deux étudiants : Jean et Julie, et trois matières : algèbre, analyse et économie. Les résultats des étudiants sont les suivants.

	Algèbre	Analyse	Economie
Jean	12	5	16
Julie	14	15	7

Soit $E = \{\text{Jean, Julie}\}$ l'ensemble des étudiants. Soit $F = \{\text{algèbre, analyse, économie}\}$ l'ensemble des matières. Pour tout x dans E et tout y dans F, on désigne par $P(x, y)$ l'expression : "l'étudiant x a la moyenne (10 ou plus) dans la matière y".

Oralement, exprimer en français courant les propositions suivantes. Dire en justifiant si elles sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$
2. $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$
3. $\exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$
4. $\forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$
5. $\exists y \in F, \forall x \in E, \text{non}P(x, y)$
6. $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x, y)$

Par exemple, la première proposition se lit “Pour tout élément x de E, pour tout élément y de F, x a la moyenne dans la matière y". En français courant, on dirait “Tous les étudiants ont la moyenne dans toutes les matières". C'est faux, puisque Jean n'a pas la moyenne en analyse.

Exercice 11 Soit a un réel. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

P : Si (pour tout réel strictement positif ε, on a $|a| < \varepsilon$) alors $a = 0$

Q : (Il existe un réel strictement positif ε tel que $|a| \geq \varepsilon$) ou $a = 0$

R : Si $a \neq 0$ alors (il existe un réel strictement positif ε tel que $|a| \geq \varepsilon$)

Montrer que R est vraie. En déduire que P et Q sont vraies.

Exercice 12 Donner, en français courant, un exemple de ou inclusif et un exemple de ou exclusif. En mathématiques, le ou est-il inclusif ou exclusif ?

Exercice 13 Soit E un ensemble. Soient $P(x)$ (respectivement, $Q(x)$) un énoncé qui, pour toute valeur donnée à x dans E, est soit vrai soit faux. Démontrer les propriétés suivantes :

1) $(\forall x \in E, P(x)$ ou $\forall x \in E, Q(x)) \Rightarrow \forall x \in E, (P(x)$ ou $Q(x))$.

2) S'il existe x dans E tel que ($P(x)$ ou $Q(x)$) alors (il existe x dans E tel que $P(x)$ ou il existe x dans E tel que $Q(x)$)

Les réciproques de ces propriétés sont-elles vraies ?

Exercice 14 *(Un problème courant dans la rédaction des récurrences)* Supposons qu'on veuille démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $2^n \leq 3^n$. Corrigez la rédaction suivante :

Soit P(n) la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \leq 3^n$. P(0) est vraie car blah blah. Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons P(n) vraie. Alors blah blah blah donc P($n+1$) est vraie. Donc, par récurrence, $2^n \leq 3^n$ pour tout entier naturel n.

Exercice 15 (Une récurrence erronée.) On considère des boîtes de crayons de couleurs. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $P(n)$ la proposition : "Dans une boîte quelconque de n crayons de couleurs, tous les crayons sont de la même couleur". Le raisonnement suivant prouve-t-il que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$? Sinon, où est l'erreur ?

Dans une boîte d'un seul crayon, les crayons ont bien sûr tous la même couleur. Donc $P(1)$ est vraie.

Soit maintenant n dans $\mathbb{N}^*$. Prenons une boîte de $n+1$ crayons. Si l'on enlève provisoirement un crayon, il reste n crayons qui, d'après $P(n)$, sont tous de la même couleur. Remettons le crayons mis à l'écart et enlevons un autre crayon. Toujours d'après $P(n)$, les n crayons restants sont tous de la même couleur. Mais comme les crayons qui ne sont pas sortis de la boîte ont une couleur constante, il s'ensuit que les $n+1$ crayons ont même couleur. Donc $P(n+1)$ est vraie. Donc, par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Question subsidiaire : pour quelles valeurs de n l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est-elle vraie ?

Exercice 16 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) Il existe un unique entier naturel n tel que $n^2 < 0$.
2) Il existe au plus un entier naturel n tel que $n^2 < 0$.
3) Il existe un unique entier naturel n tel que $n^2 = 1$.
4) Il existe au plus un entier naturel n tel que $n^2 = 1$.
5) Il existe un unique entier relatif n tel que $n^2 = 1$.
6) Il existe au plus un entier relatif n tel que $n^2 = 1$.

Voyage sur l'île de Puro-Pira (Pour s'amuser avec la logique—ces exercices se seront pas corrigés).

Le type d'énigme qui suit a été popularisé notamment par le logicien Raymond Smullyan. Vous vous trouvez sur une île un peu étrange : l'île de Puro-Pira. Vous savez qu'à part vous, on y trouve deux catégorie de gens : les Purs, qui ne disent que des choses vraies, et les Pires, qui ne disent que des choses fausses.

Alice et Bernard sont deux habitants de l'île. Il se peut que ce soient deux Purs, deux Pires, une Pure et un Pire,... Tout est possible. De plus, les questions sont indépendantes (donc il se peut que Bernard soit un Pire dans la question 1 et un Pur dans la question 2). Sauf indication contraire, votre but est de déterminer le type des habitants que vous rencontrez. Cela ne sera pas toujours possible, mais presque. Pour vous aider, les réponses aux quatres premières questions sont données dans les notes de bas de page.

On rappelle que "Si P alors Q" veut dire "(non P) ou Q". Donc si un Pur dit "Si P alors Q", c'est que P est fausse ou Q est vraie. Si un Pire dit "Si P alors Q", c'est que P est vraie et Q est fausse. D'autre part, dans ce qui suit et comme toujours en mathématiques, le "ou" est inclusif.

Rencontre 1. Bernard vous dit : "Nous sommes tous les deux des Pires". Qu'en déduisez-vous ? [1]

Rencontre 2. Alice vous dit : "Je suis une Pure et Bernard est un Pire". Que peut-on en déduire ? [2]

Rencontre 3. Alice vous dit : "Si je suis une Pure alors Bernard est un Pire". Qu'en déduisez-vous ? [3]

Rencontre 4. Alice dit : "Je suis une Pure ou Bernard est un Pur." Bernard dit : "Nous ne sommes pas du même type." [4]

A vous de résoudre les énigmes suivantes.

Question 5 :

a) trouver une phrase que ni un Pur ni un Pire ne peut dire ;

b) trouver une phrase qui peut-être dite par un Pur mais aussi par un Pire.

Rencontre 6. Alice dit : "Je ne suis ni une Pure ni une Pire." Bernard dit : "C'est vrai !"

Rencontre 7. Chloé est une habitante de l'île de Puro-Pira.

Vous : "Est-ce que Bernard et Chloé sont tous les deux des Purs ?"
Alice : "Oui."
Vous : "Est-ce que Bernard est un Pur ?"
Alice : "Non."

Rencontre 8. Entre Alice, Bernard et Chloé, l'un des trois est le chef du village.

---

1. Réponse : un Pur ne pourrait pas dire ça. Donc Bernard est un Pire. Donc ce qu'il dit est faux. Donc Alice et Bernard ne sont pas tous les deux des Pires. Or Bernard est un Pire. Donc Alice est une Pure.
2. Réponse : la seule chose que l'on puisse en déduire, c'est qu'Alice et Bernard ne sont pas tous les deux des Purs.
3. Réponse : Alice est une Pure et Bernard est un Pire. Supposons qu'Alice soit une Pire. Alors ce qu'elle dit est vraie (rappelez-vous que si P est fausse alors nonP est vraie, donc nonP ou Q est vraie, donc par définition "si P alors Q" est vraie). Donc Alice est une Pure. Contradiction. Notre supposition initiale était donc fausse. Donc Alice est une Pure. Donc ce qu'elle dit est vraie. Donc Bernard est un Pire.
4. Alice et Bernard sont tous les deux des Pires. En effet, supposons qu'Alice soit une Pure. Alors il y a deux cas : 1er cas, Alice et Bernard sont tous les deux des Purs. Alors Bernard dit la vérité, donc il ne peut pas dire "Nous ne sommes pas du même type". Contradiction. 2ème cas, Alice est une Pure et Bernard est un Pire. Alors Bernard ment toujours. Donc il ne peut pas dire "Nous ne sommes pas du même type", puisque c'est vrai. Contradiction. Donc supposer qu'Alice est une Pure mène à une contradiction. Donc Alice est une Pire. Donc ce qu'elle a dit est faux. Donc Alice et Bernard sont tous les deux des Pires.

Alice : "C'est moi le chef."
Bernard : "C'est moi le chef."
Chloé : "Au plus l'un de nous trois dit la vérité."
Qui est le chef ?

Question 9 (difficile). Sur l'île des Purs et des Pires, on a volé un cheval. Il y a 4 suspects (dont un et un seul est coupable) : Alice, Bernard, Chloé et David. Les 3 premiers sont présents au tribunal, le 4ème, David, n'a pas encore été pris. Le juge, qui est un Pur et raisonne parfaitement, pose la question : "Qui a volé le cheval ?". Voici les réponses :
Alice : "C'est Bernard qui a volé le cheval."
Bernard : "C'est Chloé qui a volé le cheval."
Chloé : "C'est David qui a volé le cheval."
Alors, l'un des 3 accusés dit : "Les 2 autres mentent !". Le juge réfléchit et après quelques instants, il désigne l'un des 3 et lui dit : "Vous ne pouvez pas avoir volé le cheval, vous êtes libre." Qui est-ce ?

L'audience se poursuit après le départ de l'innocent. Le juge demande à l'un des 2 si l'autre est un Pur et après qu'on lui a répondu par OUI ou par NON, il sait qui a volé le cheval. Qui est-ce ?

Des Espions sur l'île de Puro-Pira.

L'île de Puro-Pira a été infiltrée par des Espions. Ceux-ci peuvent dire la vérité, mentir, dire des choses paradoxales : tout est possible. Vous savez que parmi Alice, Bernard et Chloé, il y a exactement un Pur, un Pire, et un Espion. Vous devez devinez qui est quoi.

Rencontre 10.
Alice : "Je suis une Pure."
Bernard : "Je suis un Pire."
Chloé : "Bernard n'est pas un Pur."

Rencontre 11.
Alice : "Je suis une Pure."
Bernard : "Je suis un Pire."
Chloé : "Alice est une Espionne."

Rencontre 12.
Alice : "Je suis une Pure."
Bernard : "Alice est une Pure."
Chloé : "Si vous me posiez la question, je vous dirais qu'Alice est une Espionne."