Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Algèbre linéaire 1

Feuille 2 de TD
Ensembles, raisonnement, indices

Exercice 1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$ b) $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$

c) $\exists x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ et } x = -|x|)$ d) $(\exists x \in \mathbb{R}, x = |x|)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$

e) $\exists x \in \mathbb{R}^*, (x = |x| \text{ et } x = -|x|)$ f) $(\exists x \in \mathbb{R}^*, x = |x|)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}^*, x = -|x|)$

Exercice 2 Soient $A = \{3, 5\}$, et $B = \{2, 5, 9\}$. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.

Exercice 3 *(ensembles : définitions)* Soit $E = \{a\}$ un ensemble à un élement. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Exercice 4 *(Cours)* (propriétés des ensembles) Soient A un ensemble, et X, Y et Z des parties de A. Démontrer les propriétés suivantes : a) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; b) $C_A(C_A(X)) = X$; c) $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$; d) $X \subset Y \iff C_A(Y) \subset C_A(X)$

Exercice 5 (ensembles, équivalence) Soient A et B des ensembles. Montrer que $A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Exercice 6 (preuve par contraposée) Montrer par contraposée que pour tout entier naturel n, si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 7 *(Cours)* Soit x un réel positif ou nul. Montrer que si pour tout réel y strictement positif, $x \leq y$, alors $x = 0$.

Exercice 8 (preuve par l'absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par l'absurde que $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 9 (preuve cyclique) Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E. Soient A^c et B^c leur complémentaires dans E respectifs. Montrer que les 8 propositions suivantes sont équivalentes :

$(i)\, A \subset B$ $(ii) A \cap B = A$ $(iii) A^c \cup B^c = A^c$ $(iv) A \cap B^c = \emptyset$

$(v) A^c \cup B = E$ $(vi) B^c \subset A^c$ $(vii) A^c \cap B^c = B^c$ $(viii) A \cup B = B$

Exercice 10 (indices : définitions) Pour tout entier relatif k, on pose $A_k = [k, k + 10]$. Que valent les unions et intersections suivantes ?

a) $\displaystyle\bigcup_{k=3}^{9} A_k$; b) $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$; c) $\displaystyle\bigcap_{k=3}^{9} A_k$; d) $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$

Exercice 11 (indices, union, intersection) Que valent les unions et intersections suivantes ?

a) $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{R}} [\sin x, 1 + \sin x]$; b) $\displaystyle\bigcup_{x\in[1,+\infty[} \left]\frac{1}{x}, x\right[$; c) $\displaystyle\bigcap_{x\in[1,+\infty[} \left]\frac{1}{x}, x\right[$; d) $\displaystyle\bigcap_{x\in[1,+\infty[} \left[\frac{1}{x}, x\right]$

Exercice 12 (indices, propriétés de l'union et de l'intersection) Soient A un ensemble, I un ensemble d'indices et $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles indexée par I (c'est à dire, la donnée pour tout i dans I d'un ensemble B_i). Montrer que :

$$A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A\cup B_i) \quad \text{et} \quad A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)$$

Exercice 13 (différence entre l'ensemble vide, et l'ensemble contenant uniquement l'ensemble vide). Soit $E = \{0, 1, 2\}$. Quel est l'ensemble des solutions des problèmes suivants ?

Problème 1 : quels sont les sous-ensembles de E qui ont au moins 4 éléments distincts ?

Problème 2 : quels sont les sous-ensembles de E inclus dans $C_E(E)$?

Exercice 14 (ensembles) Soient A un ensemble et X, Y, Z des parties de A.

a) Donner un exemple où : $X \cup Y = X \cup Z$ et $Y \neq Z$.

b) Donner un exemple où : $X \cap Y = X \cap Z$ et $Y \neq Z$.

c) Démontrer que

$$(X\cup Y = X\cup Z \quad \text{et} \quad X\cap Y = X\cap Z) \quad \Longrightarrow Y = Z\ .$$

Exercice 15 (ensembles, quantificateurs) On considère les ensembles

$$E = \left\{x \in [0,1], \exists n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1}\right\} \text{ et } F = \left\{x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1}\right\}$$

L'ensemble E a-t-il un, une infinité, ou aucun élément ? Même question pour l'ensemble F.

Exercice 16 Pour tout entier naturel p, on note $p\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers relatifs de la forme pn avec n dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathbb{N} \subset q\mathbb{N} \Leftrightarrow p \in q\mathbb{N}$$

b) Montrer que pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathbb{N} = q\mathbb{N} \Leftrightarrow p = q$$

Exercice 17 Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E. Soit A^c le complémentaire de A dans E. Montrer les propriétés suivantes :

$$a) \quad (A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\cup C) \qquad\qquad b) \quad A\cap(A^c\cup B) = A\cap B$$

Exercice 18 (Différence symétrique de deux parties.) Soit E un ensemble. Pour A et B des parties de E, on note $A\Delta B$ l'ensemble $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$. Soient A, B et C des parties de E. Montrer que :

$$A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$$
$$A\Delta\emptyset = A,\ A\Delta B = B\Delta A,\ A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$$
$$A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

Exercice 19 Soit $(a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ une famille de réels. On définit

$$A = \min_{1\le i\le n}(\max_{1\le j\le p} a_{ij}), \quad B = \max_{1\le j\le p}(\min_{1\le i\le n} a_{ij})$$

Montrer que $B \le A$.

Exercice 20 (difficile) Soit $(A_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de parties d'un ensemble E. Les ensembles $\bigcap_{i\in I}\Big(\bigcup_{j\in J} A_{ij}\Big)$ et $\bigcup_{j\in J}\Big(\bigcap_{i\in I} A_{ij}\Big)$ sont-ils égaux ? L'un est-il inclus dans l'autre.

Exercice 21 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow n! \geq 2^n.$$

Exercice 22 (réindexation d'une somme) : Soient x un réel et n un entier naturel. Calculer les sommes $\sum_{k=2}^{n+2} x^{k-2}$ et $\sum_{k=4}^{n+3} x^{k-2}$.

Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Algèbre linéaire 1

Feuille 3 de TD
Applications

Exercice 1 Les applications suivantes sont-elles bien définies ? Si oui, sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1) $f : \{0, 1, 2\} \to \{1, 8, -1, 24\}$ telle que $f(0) = -1$, $f(1) = 24$, $f(2) = 1$.

2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$n \mapsto -n$

3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n + 1$

4) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n - 1$

5) $f : \mathbb{N} \to \{-1, +1\}$ qui à tout n de $\mathbb{N}$ associe 1 si n est pair, et -1 si n est impair.

Exercice 2 a) Quelle est l'allure du graphe des applications suivantes ? Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? (note aux chargés de TD : c'est l'occasion d'expliquer comment on lit sur le graphe de f les solutions dans de l'équation $f(x) = y$, et si f est injective, surjective ou ni l'un ni l'autre. Attention : répondre lors d'un examen : "l'application f est injective car son graphe a telle propriété", sans prouver rigoureusement que le graphe a cette propriété ne vaudra pas tous les points.)

b) Pour celles qui sont bijectives, quelle est leur application réciproque ?

c) Pour chacune de ces applications, déterminer l'image et l'image réciproque de l'intervalle $[2, 3]$.

1) $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ 2) $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ 3) $f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{array}$ 4) $f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + 1 \end{array}$ 5) $f_5 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto 1/x^2 \end{array}$

Exercice 3 Les applications suivantes sont elles-bien définies ? Si oui, sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1) $g_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ 2) $g_2 : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ 3) $g_3 : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ 4) $g_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

Exercice 4 Soit f une application de A vers B. Démontrer que $A = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(\{y\})$.

Exercice 5 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications (pas forcément bijectives). Soient $A \subset E$ et $C \subset G$. Montrer que $g \circ f(A) = g(f(A))$ et que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

Exercice 6 Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f = f$. Soit $x \in E$. Montrer que $f(x) = x$ si et seulement si $x \in f(E)$.

Exercice 7 Sans justifier, dire quelles applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ correspondent aux transformations du plan suivantes (le plan est supposé muni du repère orthonormé usuel) :

a) la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice du plan ;

b) la symétrie orthogonale par rapport à la seconde bissectrice du plan ;

c) la rotation de centre l'origine et d'angle $\pi/2$;

d) La projection sur l'axe des ordonnées ;

e) La translation de vecteur $2\vec{i} + \vec{j}$, où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont respectivement les vecteurs directeurs usuels de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.

Exercice 8 (Fonction caractéristique)

Soit E un ensemble. A toute partie A de E on associe l'application f_A de E dans $\{0, 1\}$ définie par $f_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $f_A(x) = 0$ sinon. L'application f_A est appelée fonction caractéristique de A. Soient A et B deux parties de E. Exprimer en fonction de f_A et de f_B les fonctions caractéristiques de $C_E(A)$, $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \backslash B$.

Exercice 9 L'application

$$\begin{array}{rl} g: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto xe^{-x} \end{array}$$

est-elle injective, surjective ? (On pourra avec profit construire le tableau de variation de g et utiliser des résultats d'analyse). Calculer $g^{-1}(\{-e\})$, $g^{-1}(\{1\})$, $g(\mathbb{R}_+)$ et $g^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 10 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.
b) On suppose f et g surjectives. A-t-on forcément h surjective ?
c) Montrer que si h est surjective, alors f et g sont surjectives.
d) Donner un exemple où h est injective mais ni f ni g ne sont injectives.

Exercice 11 Soient

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$$

a) l'application $h \circ f$ est-elle bien définie ?
b) Prouver que f et h sont bijectives, et déterminer leur réciproques.

Exercice 12 Soient E, F, G des ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications.
a) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 13 L'application suivante est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (n, p) & \mapsto & n + p \end{array}$$

Déterminer $f^{-1}(\{3\})$, $f(\mathbb{N} \times \{2\})$ et $f(2\mathbb{N} \times 3\mathbb{N})$ où $k\mathbb{N} = \{kn, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 14 Soient E, F, G, H des ensembles et f, g, h des applications telles que : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application strictement monotone. Montrer que f est injective. Donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injective mais non monotone.

Exercice 16 L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & (x + y, xy) \end{array}$$

est-elle injective, surjective ? bijective ?

Exercice 17 Sans justifier, pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective, ni injective ni surjective.

1) $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$ 2) $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$ 3) $f_3 : \begin{array}{rcl} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$ 4) $f_4 : \begin{array}{rcl} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$

Exercice 18 Soit f une application de E vers F. Démontrer les équivalences suivantes :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall A \subset E, A = f^{-1}(f(A))$$

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \forall B \subset F, B = f(f^{-1}(B))$$

Exercice 19 Soit f une application de E vers F et A une partie de E.

a) Démontrer qu'il n'y a en général pas d'inclusion entre $f(C_E(A))$ et $C_F(f(A))$.

b) Toutefois, démontrer : f bijective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(C_E(A)) = C_F(f(A))$.

Exercice 20 a) Existe-t-il une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement décroissante ?

b) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective mais non strictement croissante.

c) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ involutive ($f \circ f = Id_{\mathbb{N}}$) mais différente de l'identité.

d) (relativement difficile) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective. Montrer que $f(n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 21 (relativement difficile) Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective ou f est surjective si et seulement si $f = Id_E$.

Exercice 22 (relativement difficile) Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Algèbre linéaire 1

Feuille 4 de TD
Relations d'ordre, relations d'équivalence

Exercice 1 (équivalence) Soient E et F des ensembles. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par : pour tous x et y dans E, $x\mathcal{R}y$ ssi $f(x) = f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 2 (équivalence) On considère une partition $(A_i)_{i\in I}$ d'un ensemble E, c'est-à-dire une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles non vides de E telle que :

$$E = \cup_{i\in I} A_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

On définit alors la relation $\mathcal{R}$ sur E par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in I, (x \in A_i \text{ et } y \in A_i)$
Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelles en sont les classes d'équivalence ?

Exercice 3 (équivalence) *Notation : si n et p sont des entiers relatifs, on dit que n divise p, et on note $n|p$, s'il existe un entier relatif k tels que $p = kn$. Par exemple,* 6 *divise* 12 *et* 30*, mais ne divise pas* 10*.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{N}$ définie par : pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow n|(p - q)$$

(on dit alors que p est congru à q modulo n). Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et que $p\mathcal{R}q$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de p par n est le même que le reste de la division euclidienne de q par n. Quelles sont les classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$?

Exercice 4 Sur l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par, pour toutes parties A et B de $\mathbb{N}$, $A\mathcal{R}B$ si et seulement s'il existe une bijection de A dans B. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Feuille 5 de TD
Nombres complexes

Si besoin est, on pourra admettre le résultat suivant, qui sera démontré dans la suite du cours : si une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction polynôme, alors il existe un complexe z tel que $f(z) = 0$.

Exercice 1 Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2 Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leurs conjugués :

1. $1 + i(1+\sqrt{2})$.
2. $\sqrt{10+2\sqrt{5}} + i(1-\sqrt{5})$.
3. $\frac{\tan\varphi - i}{\tan\varphi + i}$ où φ est un angle donné.

Exercice 3 Représenter sous forme trigonométrique les nombres :

$$1+i \quad ; \quad 1+i\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt{3}+i \quad ; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 4 Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \qquad \text{et} \qquad e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

Exercice 5 Déterminer le module et l'argument de $\frac{1+i}{1-i}$. Calculer $(\frac{1+i}{1-i})^{32}$.

Exercice 6 Calculer les puissances n-ièmes des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad ; \quad z_2 = 1+j \quad ; \quad z_3 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}.$$

Exercice 7 Mettre sous forme trigonométrique $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$
$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0 \; ; \; z^2-(3+4i)z-1+5i=0 \; ; \; 4z^2-2z+1=0 \; ;$$
$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Exercice 9
1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1+iz| = |1-iz|$.
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$$
où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles. Trouver alors les solutions.
3. Calculer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 10 Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes $z, \frac{1}{z}$ et $(1-z)$ soient sur un même cercle de centre O.

Exercice 11
1. Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
2. Calculer $\sin^3\theta$, $\sin^4\theta$, $\cos^5\theta$, $\cos^6\theta$, à l'aide des cosinus et sinus des multiples entiers de θ.

Exercice 12 Montrer que tout nombre complexe z non réel de module 1 peut se mettre sous la forme $\frac{1+ir}{1-ir}$, où $r \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 Que dire de trois complexes a, b, c non nuls tels que $|a+b+c| = |a|+|b|+|c|$.

Exercice 14 On définit une fonction f de $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ dans $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ en posant

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}.$$

1. On suppose z réel. Quel est le module de $f(z)$?
2. Trouver les nombres complexes z tels que $f(z) = z$.

Exercice 15 Montrer que si a et b sont deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$, alors $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est réel.

Exercice 16 Que dit la formule de Moivre ? Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$, $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta)$ (indication : $\cos(k\theta) = Re\left(e^{ik\theta}\right)$). Calculer $\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$.

Exercice 17 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \cos(x + (2k\pi/n))$ et $\sum_{k=1}^{n} \sin(x + (2k\pi/n))$.

Exercice 18 Démontrer l'égalité du parallélogramme :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}, |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

Exercice 19 Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2, z^3 soient alignés.

Exercice 20 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = \frac{2}{\bar{z}}.$$

a) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $f \circ f(z) = z$.
b) f est-elle bijective ? Si oui, calculer f^{-1}.
c) Soit R un réel strictement positif, et C le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$. Calculer $f(C)$.
d) Quel est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, f(z) = z\}$?

Exercice 21 Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, associe :

$$f(z) = \frac{1}{2}(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}).$$

a) Montrer que pour tout z réel, $f(z) = \cos(z)$.
b) Soit z dans $\mathbb{C}$. Montrer que $f(z+2\pi) = f(z)$, que $f(-z) = f(z)$, et que $f(2z) = 2(f(z))^2 - 1$.
c) f est-elle injective ?
d) Calculer $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 22 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

a) L'application f est-elle injective ? surjective ?
b) Calculer l'image réciproque de $\{i\}$ par f.
c) Déterminer l'image directe du cercle unité U par f.
d) On note H le complémentaire dans $\mathbb{C}$ du segment $[-1, 1]$, et on note D l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, |z| < 1\}$. Montrer que l'on peut définir l'application :

$$\begin{array}{rcl} g : D & \longrightarrow & H \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$$

e) Montrer que g est bijective. (On pourra remarquer que le produit des racines de l'équation $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ est 1).

Exercice 23 Calculer les racines carrées de $-2 + 2\sqrt{3}i$, puis celles de $9i$.

Exercice 24 Résoudre l'équation $z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$.
a) Exprimer les racines z_1 et z_2 en fonction des nombres complexes $a = (\sqrt{3} + i)/2$ et $b = (-1 + i\sqrt{3})/2$.
b) Déterminer le module et l'argument de ces racines.
En déduire les valeurs de $\cos(5\pi/12)$, $\sin(5\pi/12)$, $\cos(11\pi/12)$ et $\sin(11\pi/12)$.

Exercice 25 Soit δ une racine carrée du nombre complexe z. Trouver les racines carrées de $-z$, $(1 + i)z$ et z^3 en fonction de δ.

Exercice 26 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 27 Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(x + i)^n = (x - i)^n$$

Exercice 28 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Développer $(\cos\theta + i \sin\theta)^n$; en déduire que $\cos(n\theta)$ est un polynôme en $\cos\theta$ et calculer ce polynôme pour $n = 1, 2, 3$.

Exercice 29 Exprimer $(\cos 5x)(\sin 3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$

Exercice 30 Soit U^* le cercle unité de $\mathbb{C}$ privé du point -1 :

$$U^* = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1, z \neq -1\}$$

On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \frac{1-ix}{1+ix} \end{array}$$

i) Calculer, pour tout réel x, le module de $f(x)$. L'application f est-elle surjective ? injective ? Peut-on avoir $f(x) = -1$?
ii) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans U^* telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)$. Montrer que g est bijective.
iii) On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur U^* par :

$$z\mathcal{R}t \text{ si et seulement si } g^{-1}(z) \leq g^{-1}(t)$$

$\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? transitive ? une relation d'ordre ?