Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Algèbre linéaire 1

Feuille 8 de TD
Matrices

Exercice 1 On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Effectuer tous les produits de ces matrices deux à deux lorsqu'ils existent.

Exercice 2 Comparer AB et BA pour les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 Soient A et B deux matrices. A quelle condition les matrices AB et BA existent-elles toutes les deux ? A quelle condition ont-elles le même format ?

Exercice 4 Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ une matrice de $M_{n,1}$ et $X = (x_1, \ldots, x_n)$ une matrice de $M_{1,n}$. Vérifier que les deux produits UX et XU sont possibles et calculer les.

Exercice 5 Soit A une matrice de $M_{n,p}$.

a) Si I_n est la matrice unité d'ordre n, montrer que $I_n A = A$ puis que $AI_p = A$.

b) Soit E_{ij} la matrice élémentaire de M_n dont tous les coefficients valent 0, sauf celui situé sur la ligne i et la colonne j, qui vaut 1. Calculer $E_{ij}A$. On note ici F_{ij} la matrice élémentaire de M_p définie de manière analogue. Calculer AF_{ij}.

Exercice 6 a) Déterminer deux matrices A et B de $M_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Calculer AB et BA. A-t-on $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Exercice 7 Puissance de matrice et formule du binôme : Soit A une matrice de M_n. On définit les puissances de A par récurrence :

$$A^0 = I_n \ , \ A^1 = A \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, \ \ A^{p+1} = A^p A = AA^p.$$

On dit que deux matrices A et B de M_n commutent si $AB = BA$. Montrer que si A et B commutent, la formule du binôme de Newton est vraie :

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k} \ \text{ avec } \ C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = A - I_3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer J^n, puis A^n.

Exercice 9 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 10 Soient A et B deux matrices de M_n. Effectuer les produits :

$$(A+B)^2 \ , \ (A-B)(A+B) \ , \ (A-B)^2 \ , \ (AB)^2 \text{ et } (I + A + \ldots + A^k)(I - A).$$

Exercice 11 Soient A et B deux matrices de M_n triangulaires inférieures. Montrer que leur somme et leur produit sont aussi triangulaires inférieures.

Exercice 12 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de M_n. On appelle trace de A, et on note $tr(A)$ le nombre réel :

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Montrer que : $\forall A \in M_n$, $\forall B \in M_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B), \qquad tr(\lambda A) = \lambda tr(A), \qquad tr(AB) = tr(BA).$$

Exercice 13 Soient A et B deux matrices carrées réelles, de format $n \times n$, avec $tr(A) \neq -1$. Déterminer les matrices $X \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$X + (tr(X))A = B \ .$$

Exercice 14 1) Soit X une matrice colonne à coefficient réels. Calculer $X^T X$. Montrer que $X^T X = 0$ si et seulement si $X = 0$.

2) Soit A une matrice à coefficient réels et X une matrice colonne à coefficient réels telle que le produit AX existe. Montrer que $AX = 0$ si et seulement si $X^T A^T AX = 0$.

3) Montrer qu'ainsi énoncé ces résultats sont faux pour des matrices à coefficients complexes. Comment peut-on les géneraliser au cas des matrices à coefficients complexes ?

Exercice 15 a) Montrer que, pour toute matrice A de $M_{n,p}$, les produits $A(A^T)$ et $(A^T)A$ sont des matrices carrées symétriques. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AA^T et $A^T A$.

b) Montrer que toute matrice carrée B peut s'écrire de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique T. Déterminer S et T si $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ non nulle (c'est-à-dire différente de la matrice nulle) et symétrique.

1) Montrer que A^2 est symétrique.

2) Exprimer les coefficients de A^2 en fonction de ceux de A.

3) Montrer que la trace de A^2 est strictement positive, puis en déduire que A^2 est non nulle.

4) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, A^k est non nulle.

Exercice 17 La somme de deux matrices inversibles est-elle toujours inversible ?

Exercice 18 Déterminer l'inverse (quand il existe) des matrices suivantes par la méthode du pivot :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. En déduire que A n'est pas inversible. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice N telle que : $B = I + N$, puis calculer $(I - N)(I + N)$. En déduire que B est inversible et calculer son inverse, puis B^{100}.

Exercice 20 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

b) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer en fonction de n et des termes initiaux les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par u_0, v_0 et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 5u_n - 2v_n \end{cases}$$

Exercice 21 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^3 - 6A^2 + 12A$.

b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 22 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note I la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$, et 0 la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 + A + I = 0.$$

a) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = -A - I$.

b) Montrer que $A^3 = I$.

c) Calculer, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, A^p en fonction de A et I.

Exercice 23 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 puis A^3.

b) A est-elle inversible ?

c) On note I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $(A + I)^{10}$.

d) On considère les suites les suites réelles (u_n), (v_n) et w_n définies par u_0, v_0 et w_0 et par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = v_n \end{cases}$$

Calculer v_{10} quand $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = -1$.

Exercice 24 *(suite des noyaux)* Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$. On pose appelle noyau de A et on note $KerA$ l'ensemble des vecteurs colonnes X à n composantes tels que $AX = 0$:

$$KerA = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$$

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $Ker(A^k) \subset Ker(A^{k+1})$.

2) Soit k un entier naturel tel que $Ker(A^{k+1}) = Ker(A^k)$. Montrer que pour tout entier $q \geq k$, $Ker(A^q) = Ker(A^k)$.

3) En déduire que si pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A^2X = 0 \Leftrightarrow AX = 0$, alors pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $A^kX \Leftrightarrow AX = 0$.

Exercice 25 *(racines carrés de matrices)* Définition : Soit A et M des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On dit que M est une racine carrée de A si M^2 est bien définie et $M^2 = A$.

a) Soit M une matrice. Montrer que le produit MM n'est défini que si M est une matrice carrée. En déduire que si une matrice A a une racine carrée (ou cubique d'ailleurs), alors A est carrée.

b) Montrer que la matrice suivante n'a aucune racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a aucune racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mais a exactement deux racines carrées dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

d) Dans $M_2(\mathbb{R})$, montrer que la matrice I_2 a une infinité de racines carrées dont les coefficients diagonaux sont nuls.

e) Déterminer toutes les racines carrées de la matrice I_2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donner un exemple de racine carrées de I_2 dans $M_2(\mathbb{C})$ qui n'appartient pas à $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 26 On considère des matrices à coefficients réels. Soit A une matrice $n \times p$. On appelle noyau de A l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{p,1}$ telles que $AX = 0$. On appelle image de A l'ensemble des matrices colonnes $B \in \mathcal{M}_{n,1}$ telles que le système linéaire $AX = B$ ait au moins une solution. Déterminer le noyau et l'image des matrices suivantes. A chaque fois, calculer la somme du nombre de "degrés de liberté" du noyau et de l'image et comparer avec le nombre de colonnes de A. Que constatez-vous ?

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 6) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 7) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 27 Pour les matrices carrées A de l'exercice précédent (donc toutes sauf la 7)), déterminer les réels λ tels que le système linéaire $AX = \lambda X$ ait (au moins) une solution X non nulle. Pour chacune de ces valeurs de λ, résoudre le système $AX = \lambda X$.

Feuille 9 de TD
Systèmes linéaires

Exercice 1 Déterminer le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$1)\left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{array}\right. \qquad 2)\left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \end{array}\right. \qquad 3)\left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 10+2i \\ 2x_1 & + & (4+2i)x_2 & = & 6+2i \end{array}\right.$$

Exercice 2 Déterminer en fonction de la valeur des paramètres a et b le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$1)\left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = & b \end{array}\right. \qquad 2)\left\{\begin{array}{ccccc} 2ax_1 & + & ax_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & b \end{array}\right.$$

Exercice 3 Un système linéaire peut-il avoir exactement trois solutions ? Pourquoi ?

Exercice 4 Un système linéaire de n équations à n inconnues a-t-il toujours exactement une solution ? au moins une solution ? au plus une solution ?

Exercice 5 a) Considérons un système linéaire de 7 équations à 5 inconnues dont le rang est 4. Ce système a-t-il nécéssairement au moins une solution ? au plus une solution ? Ce système peut-il avoir une solution unique ?

b) Mêmes questions pour un système de 7 équations à 5 inconnues de rang 5

c) Mêmes questions pour un système de 5 équations à 7 inconnues de rang 4, puis pour un système de 5 équations à 7 inconnues de rang 5.

Exercice 6 Résoudre les systèmes linéaires figurant dans le polycopié sur les systèmes linéaires (i.e. pour vous entraîner, résoudre vous même les systèmes du polycopié, et ne vérifier en regardant les solutions qu'à la fin).

Exercice 7 Résoudre les systèmes suivants (pour les deux derniers, résoudre en fonction de la valeur des paramètres réels a, b et m).

$$1)\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & +y & +2z & = & 7 \\ x & +y & +z & = & 4 \\ -2x & +y & -2z & = & -4 \end{array}\right. \qquad 2)\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & +y & +2z & = & 7 \\ x & +y & +2z & = & 4 \\ -2x & +y & -z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$3)\left\{\begin{array}{cccccc} x & -2y & +3z & -4t & = & 4 \\ & y & -z & +t & = & -3 \\ x & +3y & & -3t & = & 1 \\ x & +2y & +z & -4t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$4)\left\{\begin{array}{cccc} x & +y & +2z & =1 \\ x & +2y & +z & =2 \\ 3x & +4y & +5z & =a \\ & y & +3z & =b \end{array}\right. \qquad 5)\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +(2m-1)z & = & 1 \\ mx & +y & +z & = & -1 \\ x & +my & +z & = & 3(m+1) \end{array}\right.$$